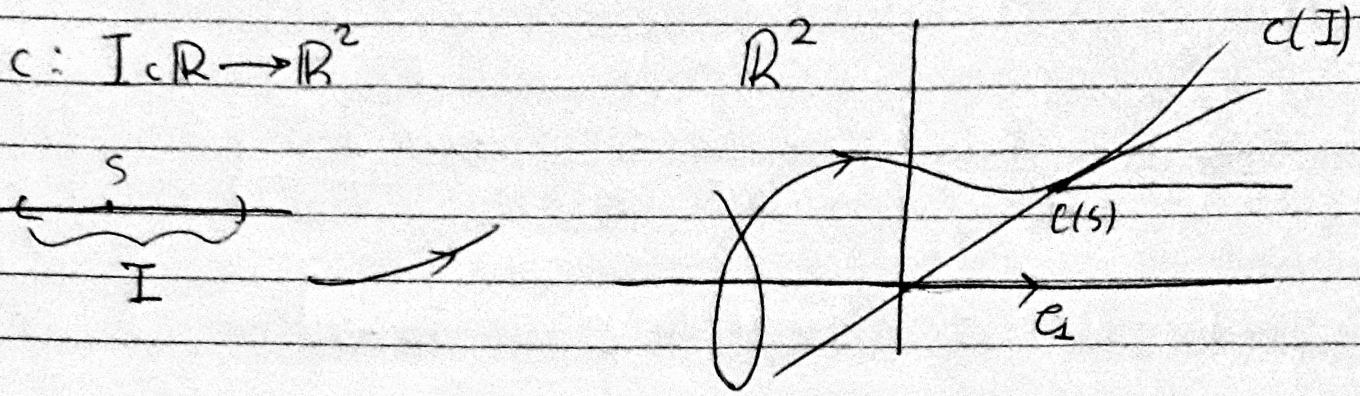
Μάθημα 4ο 27/10/17

• Καμπυλότητα Καμπυλών του $\mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο

$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$



$k : I \to \mathbb{R}$ $\qquad k = \dot{\varphi} = \dfrac{d\varphi}{ds}$

$\dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}(s) = \cos\varphi(s) = \cos\bar{\varphi}(s) \\ \dot{y}(s) = \sin\varphi(s) = \sin\bar{\varphi}(s) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ \lambda(t) \in \mathbb{Z} : \bar{\varphi}(t) = \varphi(t) + 2\lambda(t)\pi$$

$$\Rightarrow \lambda(t) = \frac{\bar{\varphi}(t) - \varphi(t)}{2\pi} \xrightarrow[\text{συνέχεια } \lambda(t)]{\text{λόγω}} \lambda(t) = \text{σταθ.}$$

$k = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle$ όπου $J = R_{\pi/2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$J(v_1, v_2) = (-v_2, v_1)$

Παρατήρηση

Θεωρώ αναπαραμέτρηση με παράμετρο $\bar{s} = -s$

$$\frac{dc}{d\bar{s}} = \frac{ds}{d\bar{s}}\frac{dc}{ds} \Rightarrow \boxed{\frac{dc}{d\bar{s}} = -\dot{c}}$$

$$\left\| \frac{dc}{d\bar{s}} \right\| = \|-\dot{c}\| = 1 \Rightarrow \bar{s} \text{ φυσική}$$

Παρατ. $\boxed{\bar{k} = \langle \ddot{\bar{c}}, J\dot{\bar{c}} \rangle}$

$$\dot{\bar{c}} = \frac{d^2\bar{c}}{d\bar{s}^2} = -\frac{d}{d\bar{s}}(\dot{c}) = -\frac{ds}{d\bar{s}}\frac{d\dot{c}}{ds} \Rightarrow \boxed{\ddot{\bar{c}} = \ddot{c}}$$

$\bar{k}$ = καμπύλη της c (αναπ. τη c με $\bar{s} = -s$)

$$\bar{k} = -\langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle \Rightarrow \boxed{\bar{k} = -k}$$

$\boxed{\text{ΕΡΩΤΗΜΑ}}$

Έχουν γεωμετρ. ισότιμες καμπύλες την ίδια καμπυλότητα ;;

Έστω $c, \tilde{c}\ I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καμπύλες γεωμετρικώς ισότιμες με παράμετρο το μήκος τόξου s δηλαδή $\tilde{c} = T \circ c$ όπου $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$, $T = T_v \circ A$, $A \in O(2)$

Η καμπύλη της c είναι $k = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle$

" " $\tilde{c}$ " $\tilde{k} = \langle \ddot{\tilde{c}}, J\dot{\tilde{c}} \rangle$

$$\dot{\tilde{c}} = A\dot{c} \Longrightarrow \ddot{\tilde{c}} = A\ddot{c}$$

$$\tilde{k} = \langle \ddot{\tilde{c}}, J\dot{\tilde{c}} \rangle = \langle A\ddot{c}, J(A\dot{c}) \rangle$$

① Έστω ότι ο $A = R_\theta$ = Στροφή κατά γωνία θ.

$J \circ A = A \circ J$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\tilde{k} = \langle A\ddot{c}, A(J\dot{c})\rangle$

$= \langle \ddot{c}, J\dot{c}\rangle \Rightarrow$

• Αν A στροφή (διατηρεί τον προσανατολισμό) $\Rightarrow \tilde{k} = k$

② Έστω ότι ο A είναι κατοπτρισμός: κθ με πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow J \circ A = -A \circ J$

$\tilde{k} = \langle A\ddot{c}, -A(J\dot{c})\rangle = -\langle \ddot{c}, J\dot{c}\rangle = -k$

Ερώτημα: Είναι οι ευθείες οι μόνες ευθείες με καμπυλότητα $\boxed{k=0}$

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη με φυσική παράμετρο και καμπυλότητα $k=0 \Rightarrow \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle = 0$

$\{\dot{c}, J\dot{c}\}$ ορθομοναδιαία βάση του $\mathbb{R}^2$

$$\ddot{c} = \langle \ddot{c}, \dot{c} \rangle \dot{c} + \cancel{\langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle} J\dot{c} \quad (*)$$

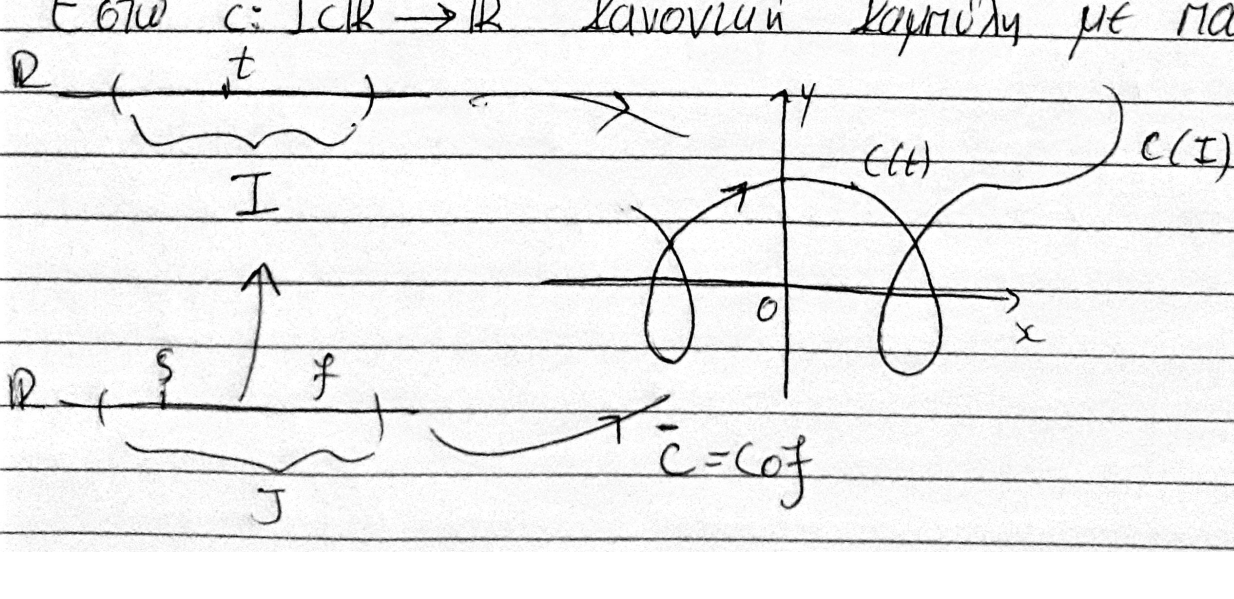
$$0 = (\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle)^{\cdot} = \langle \ddot{c}, \dot{c} \rangle + \langle \dot{c}, \ddot{c} \rangle = 2\langle \ddot{c}, \dot{c} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \ddot{c}, \dot{c} \rangle = 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} \ddot{c}(s) = 0 \quad \forall s \in I \Rightarrow \dot{c}(s) = v \quad \forall s \in I$$

$\Rightarrow c(s) = p_0 + sv$ [ευθεία που διέρχεται από το p_0 και είναι "//" στο v]

Καμπυλότητα κανονικών καμπυλών με τυχούσα παράμετρο

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ κανονική καμπύλη με παράμετρο $t \in I$



Θεωρώ τη συνάρτηση μήκος τόξου $s: I \to \mathbb{R}$
$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| du$ με αφετηρία $t_0 \in I$. Η $s = s(t)$

είναι λεία με παράγωγο $\frac{ds}{dt}(t) = \|c'(t)\| > 0$

$\forall\ t \in I \Rightarrow$ Η $s = s(t)$ αντιστρέφεται με λεία αντίστροφη
$t = f(s) = t(s)$ με παράγωγο $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}$ ή $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|c'\|}$

Η αναπαραμετρωποποίηση της c με φυσική παράμετρο είναι η καμπύλη $\bar{c} = c \circ f$, $\bar{c} = \frac{c'}{\|c'\|}$

Η $\bar{c}$ έχει καμπυλότητα $\bar{K}$.

$\bar{K}: J \to \mathbb{R}$, $\bar{K}(s)$

$\boxed{\text{Ορισμός}}$

Καλούμε καμπυλότητα της κανονικής καμπύλης $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με παράμετρο $t \in I$ τη συνάρτηση

$K: I \to \mathbb{R}$, $K = \bar{K} \circ s$
$K(t) = \bar{K}(s(t))$

<u>Υπολογισμός καμπυλότητας καμπύλης τυχούσας παραμέτρου</u>

Έστω $c: I \to \mathbb{R}$ καμπύλη με παράμετρο $t \in I$ και
$c(t) = (x(t), y(t))$

$' = \frac{d}{dt}$, $\dot{} = \frac{d}{ds}$

$$\boxed{k = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \qquad \dot{x} = \frac{dx}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \boxed{\dot{x} = \frac{dt}{ds}x'}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \boxed{\dot{y} = \frac{dt}{ds}y'}$$

$$\ddot{x} = \frac{d}{ds}\dot{x} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}x'\right) = \frac{d^2t}{ds^2}x' + \frac{dt}{ds}\frac{dx'}{ds} =$$

$$= \frac{d^2t}{ds^2}x' + \frac{dt}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\frac{dx'}{dt}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{d^2t}{ds^2}x' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 x''}$$

<u>Ομοίως</u>: $\boxed{\ddot{y} = \frac{d^2t}{ds^2}y' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 y''}$

$$k = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \frac{dt}{ds}x'\left(\frac{d^2t}{ds^2}y' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 y''\right) - \frac{dt}{ds}y\left(\frac{d^2t}{ds^2}x' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 x''\right)$$

$$k = \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 (x'y'' - y'x''), \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|c'\|}, \quad s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\|du$$

$$k = \frac{x'y'' - y'x''}{\|c'\|^3}, \quad c(t) = (x(t), y(t)), \quad c'(t) = (x'(t), y'(t))$$

ΠΡΟΤΑΣΗ Η καμπυλότητα κανονικής καμπύλης

$c(t)=(x(t),y(t))$, $t\in I$ είναι $k=\dfrac{x'y''-y'x''}{((x')^2+(y')^2)^{3/2}}$

$$\underline{k=\langle \ddot{c}, J\dot{c}\rangle}$$

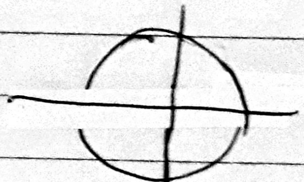
$$k=\frac{x'y''-y'x''}{((x')^2+(y')^2)^{3/2}}=\frac{\langle c'', Jc'\rangle}{\|c'\|^3}$$

$c'=(x',y')$, $Jc'=(-y',x')$

$c''=(x'',y'')$

"ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ"

Θεωρώ την καμπύλη $c(t)=(\underbrace{r\cos t}_{x(t)}, \underbrace{r\sin t}_{y(t)})$



$c'(t)=(-r\sin t, r\cos t)\neq(0,0)$ $\forall t\in\mathbb{R}$ άρα είναι κανονική με καμπυλότητα

$$k(t)=\frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2+(y'(t))^2)^{3/2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} k'(t)=-r\sin t \\ k''(t)=-r\cos t \end{array}\right| \begin{array}{l} y'(t)=r\cos t \\ y''(t)=-r\sin t \end{array} \Big| \Rightarrow k(t)=\frac{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}{(r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t)^{3/2}}=$$

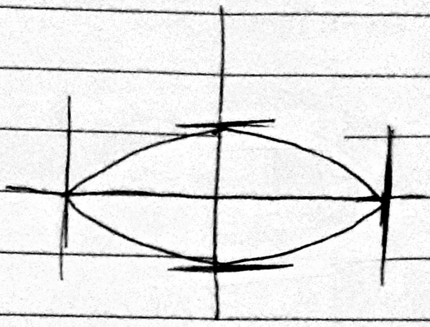
$$\Rightarrow k(t)=\frac{r^2}{(r^2)^{3/2}}=\frac{r^2}{r^3} \Rightarrow \boxed{k(t)=\frac{1}{r}}$$

Παράδ.

Θεωρώ την καμπύλη

$c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 \quad , \quad c(t)=(a\cos t \,,\, b\sin t) \quad , \quad a,b>0$

$x(t)=a\cos t$	$y(t)=b\sin t$
$x'(t)=-a\sin t$	$y'(t)=b\cos t$
$x''(t)=-a\cos t$	$y''(t)=-b\sin t$



$c'(t)=(-a\sin t, b\cos t)\neq(0,0) \quad \forall\, t\in\mathbb{R}$

Είναι κανονική με καμπυλότητα

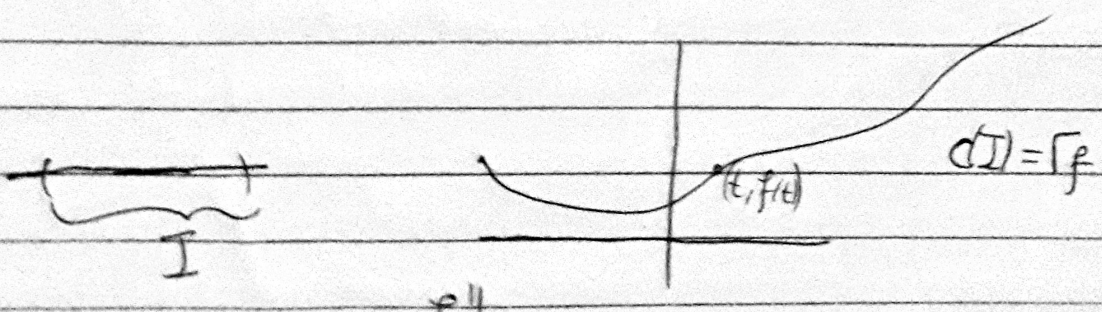
$$k(t)=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{\left((x'(t))^2+(y'(t))^2\right)^{3/2}}=\frac{ab\sin^2 t+ab\cos^2 t}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}=$$

$$\Leftrightarrow k(t)=\frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

~ Καμπύλες γραφήματα ~

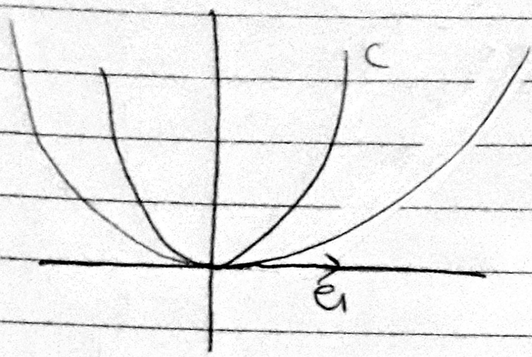
Δίνεται λεία συνάρτηση $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
Θεωρώ την καμπύλη γράφημα

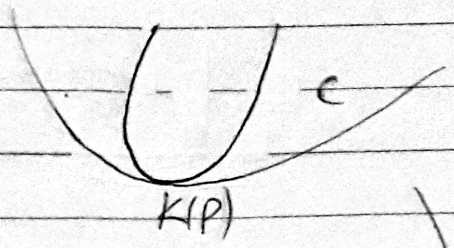
$c: I\to\mathbb{R}, \quad c(t)=(t, f(t))$

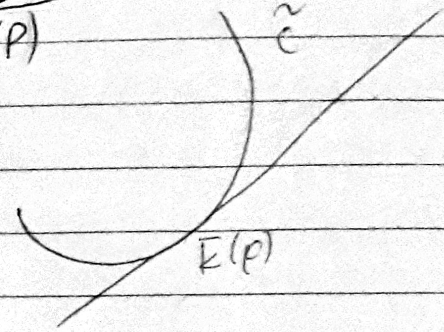


$$k=\frac{f''}{(1+(f')^2)^{3/2}}$$

Έστω καμπύλη $c, \tilde{c} : I \to \mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου "s". Θεωρώ $s_0 \in I$ και υποθέτω ότι η καμπυλότητα $k(s_0) > \tilde{k}(s_0)$







Κοντά στο $(0,0)$ οι καμπύλες είναι καμπύλες γραφήματα συναρτήσεων $f, \tilde{f} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$

$c(x) = (x, f(x))$, $\tilde{c}(x) = (x, \tilde{f}(x))$, $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$c(0) = (0,0) = \tilde{c}(0) \Rightarrow \boxed{f(0) = \tilde{f}(0) = 0}$

$$\left.\begin{aligned} c'(0) &= (1, f'(0)) = (1,0) \\ \tilde{c}'(0) &= (1, \tilde{f}'(0)) = (1,0) \end{aligned}\right| \Rightarrow f'(0) = \tilde{f}'(0) = 0$$

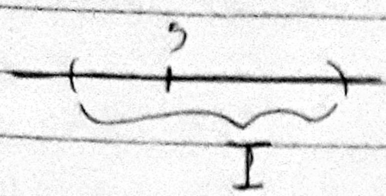
$k(0) > \tilde{k}(0) \Rightarrow f''(0) > \tilde{f}''(0)$

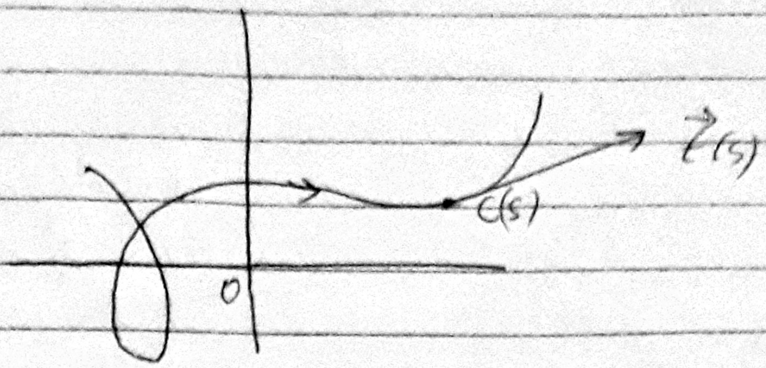
Θεωρώ τη συνάρτηση $g = f - \tilde{f}$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$

$g''(0) = f''(0) - \tilde{f}''(0) > 0$

$\Rightarrow$ Η g έχει γνήσιο τοπικό ελάχιστο στο $\boxed{x_0 = 0}$

Έστω $c: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ η καμπύλη με φυσική παράμετρο





$c(s)=(x(s),y(s))$

$\dot{c}(s)=(\dot{x}(s),\dot{y}(s))=(\cos\varphi(s),\sin\varphi(s))$, $k=\dot{\varphi}$

Συμβολίζω με $\vec{t}(s)=\dot{c}(s)$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $J:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ $J=R_{\pi/2}$, $J(v_1,v_2)=(-v_2,v_1)$

Ορίζω το κάθετο διάνυσμα της καμπύλης ως $\vec{n}(s)=J\vec{t}(s)$ $\forall s\in I$ / $\{\vec{t}(s),\vec{n}(s)\}$ είναι ορθομοναδιαία δεξιόστροφη βάση, πλαίσιο Frenet

$\vec{t}(s)=(\cos\varphi(s),\sin\varphi(s))$

$\vec{n}(s)=(-\sin\varphi(s),\cos\varphi(s))$

$$\vec{t}(s)=(-\dot{\varphi}(s)\sin\varphi(s),\ \dot{\varphi}(s)\cos\varphi(s))=\dot{\varphi}(s)\underbrace{(-\sin\varphi(s),\ \cos\varphi(s))}_{\vec{n}(s)}$$

$$\vec{n}(s)=(-\dot{\varphi}(s)\cos\varphi(s),-\dot{\varphi}(s)\sin\varphi(s))=-\dot{\varphi}(s)\underbrace{(\cos\varphi(s),\sin\varphi(s))}_{\vec{t}}$$

$\langle\vec{t},\vec{t}\rangle=1\Rightarrow 2\langle\vec{t},\vec{t}\rangle=0$

$\langle\vec{n},\vec{n}\rangle=1\Rightarrow 2\langle\vec{n},\vec{n}\rangle=0$

$$\begin{cases}\vec{t}=k\vec{n}\\ \vec{n}=-k\vec{t}\end{cases}$$ Εξίσωση Fernet

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΟΥ $\mathbb{R}^2$

ΘΕΩΡΗΜΑ (i) (Ύπαρξη) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $k: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(s)$ με $s \in I$ $\exists$ C^2 καμπύλη $c: I \to \mathbb{R}^2$ με παράμετρο s μήκος τόξου και καμπυλότητα της δοθείσας συνάρτησης k.

(ii) Έστω $c, \tilde{c}: I \to \mathbb{R}^2$ καμπύλες με κοινή παράμετρο μήκος τόξου και καμπυλότητες $k, \tilde{k}$ αντίστοιχα. Αν ισχύει $k(s) = \tilde{k}(s)$ $\forall$ $s \in I$ τότε οι καμπύλες είναι γεωμετρικά ίσες, δηλαδή υπάρχει $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$ η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό τέτοια ώστε $\tilde{c} = T \circ c$.

<u>Αποδ</u> (i) <u>Ύπαρξης</u>

Θεωρώ $s_0 \in I$ και την συνάρτηση $\varphi(s) = \int_{s_0}^{s} k(u)\,du$

Η φ είναι C^1 με $\dot{\varphi} = k$.

Θεωρώ την καμπύλη $c: I \to \mathbb{R}^2$ με

$$c(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos\varphi(u)\,du, \int_{s_0}^{s} \sin\varphi(u)\,du \right)$$

$$c(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos\left(\int_{s_0}^{s} k(u)\,du \right) du, \int_{s_0}^{s} \sin\left(\int_{s_0}^{s} k(u)\,du \right) du \right)$$

Η c είναι

$\frac{dc}{ds} = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)) \Rightarrow \left\| \frac{dc}{ds} \right\| = 1 \Rightarrow s$ μήκος τόξου

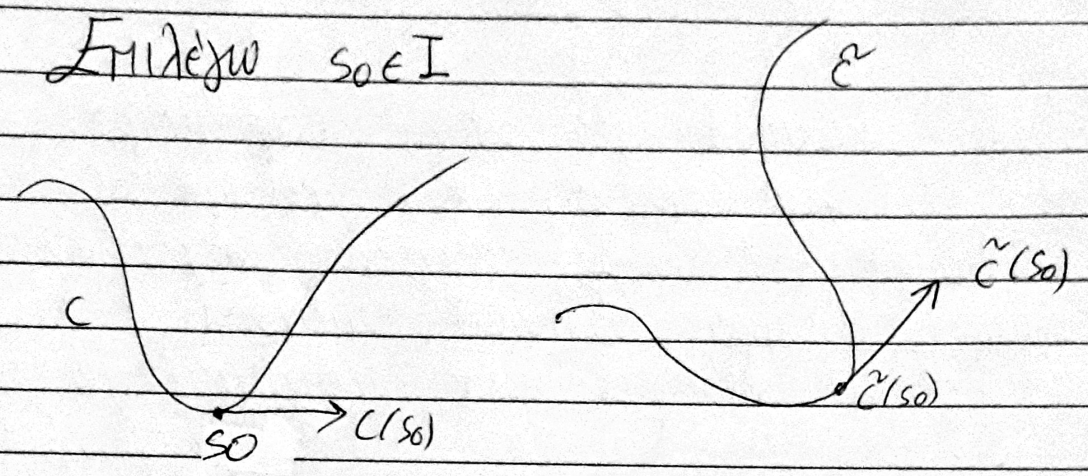
$\dot{c}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$

$\ddot{c}(s) = \left(-\dot{\varphi}(s)\sin\varphi(s), \dot{\varphi}(s)\cos\varphi(s)\right)$

Η c είναι C^2 με καμπυλότητα $\dot{\varphi} = \kappa$

(ii) <u>Μοναδικότητα</u>

Επιλέγω $s_0 \in I$



Θεωρώ ισομετρία $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$ με $T = T_v \circ A \circ T_w$
T_v = παράλ. μεταφορά κατά $v = c(s_0)$

T_w = " " κατά $w = -\tilde{c}(s_0)$

A είναι στροφή και $A\dot{\tilde{c}}(s_0) = \dot{c}(s_0)$
Θεωρώ την καμπύλη $\boxed{\bar{c} = T \circ \tilde{c}}$

$\bar{c}(s_0) = T_v \circ A \circ T_w(\tilde{c}(s_0)) = T_v(\underbrace{A(\underbrace{T_w(\tilde{c}(s_0))}_{=0})}_{=0}) = T_v(0) = c(s_0)$

Άρα $\boxed{\bar{c}(s_0) = c(s_0)}$

s = μήκος και για την $\bar{c}$
Το διάνυσμα ταχύτητας της $\bar{c}$ στο s_0
είναι $\dot{\bar{c}}(s_0) = A\dot{\tilde{c}}(s_0) = \dot{c}(s_0)$

$\boxed{\dot{\bar{c}}(s_0) = \dot{c}(s_0)} \Rightarrow \varphi(s_0) = \bar{\varphi}(s_0)$

$k(s) = \tilde{k}(s)$

$k(s) = \dot{\varphi}(s)$, $\quad \dot{c}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$

$\tilde{k}(s) = \check{\varphi}(s)$

$\tilde{c}(s) = (\cos\bar{\varphi}(s), \sin\bar{\varphi}(s))$

$$k(s) = \bar{k}(s) \Rightarrow \dot{\varphi}(s) = \dot{\bar{\varphi}}(s) \Rightarrow \underbrace{(\varphi(s) - \bar{\varphi}(s))} = 0 \quad \forall s$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(s) = \bar{\varphi}(s) \quad \forall s$$

$$\dot{c}(s) = \dot{\bar{c}}(s) \quad \forall s \xRightarrow{c(s_0) = \bar{c}(s_0)} \bar{c}(s) = c(s) \quad \forall s$$

Π.χ

$k(s) = \alpha s$